数理解析研究所講究録
第 1885 巻 2014 年 86-104

2次元ゲルファント問題における爆発解析と点渦系のハミルトニアン [1]

金沢大学・理工研究域・数物科学系　大塚　浩史 [2]
Hiroshi Ohtsuka
Faculty of Mathematics and Physics,
Institute of Science and Engineering,
Kanazawa University

概要

点渦系は、本 RIMS 共同研究のテーマである「長距離力に支配された」系の代表例である。2次元ゲルファント (Gel'fand) 問題とは、この点渦系の平衡平均場が満たす非線形偏微分方程式の境界値問題であるが、他にも多くの由来が知られており、数学では古くから深く研究されてきた。特にその解の爆発挙動が詳しく調べられているが、知られている事実を点渦系の言葉で言えば、系の逆温度が特定の値に収束するときに限り、点渦が有限個の点の周りに集中する現象が起こる、となる。これは、点渦系が、特定の逆温度付近において、自発的に秩序ある構造が現れる「自己組織化」を起こす可能性をもつことを、数学の立場から示していると考えられる。本稿は、この爆発挙動の詳細、特に、爆発しつつある解の線形化作用素の固有値の挙動が、点渦系のハミルトニアン (Hamitonian) と関連することを報告する。

本研究は、F. Gladiali 氏 (Sassari 大)、M. Grossi 氏 (Roma "La Sapienza" 大)、鈴木貴氏 (大阪大) との共同研究による。なお、本共同研究の趣旨に鑑み、本稿執筆にあたり、できる限り少ない数学の予備知識で読めるように努めた。

1　始めに

流体の基礎方程式は、他の非線型偏微分方程式と比較しても解析が困難であると思われるが、2次元非圧縮性完全流体では、渦度場を有限個の Dirac 測度の線形結合として単純化した「点渦系」という近似モデルが知られている。後に説明するが、点渦系は、流体の基礎方程式 (この場合は、非圧縮性 Euler 方程式) の解であると考えるには心許ないところもあるが、様々な場面で活用されるとともに、その性質が研究されている。[3]

点渦系については、Onsager の考察 ([31]) が著名である。Onsager は、同じ種類の点渦からなる点渦系を考察し、点渦系が Hamilton 系をなすこと、有限の領域内を運動する点渦系の相空間の面積が有限 (これは、各点渦の相空間が、運動している領域に一致している事による) であることから、それらに対し負温度の平衡状態が起こり得ることを指摘した。Onsager はこれを用いて、木星の大赤班など、平面的な流体運動にしばしば見られる、長期間持続する大規模構造が発現する理由を説明しようとしたのである。すなわち、温度が負であれば、通常と異なり、高いエネルギー (ここでは、点渦系の Hamiltonian の値) を持つ状態が起こりやすい、という訳である。同じ種類の点渦系における高いエネルギーを持つ状態は、点渦が凝集した状態と考えられる。このような凝集した点渦の分布として大規模構造を捉えようとしたのである。

Onsager の論文は、そのような考察の可能性を指摘したに留まると思われるが、これを実際に示すためにさまざまな試みがなされてきた。それらの多くは、点渦の数を限りなく大きくした極限に

---

[1]本研究は JSPS 科研費 22540231 の助成を受けたものである。

[2]ohtsuka@se.kanazawa-u.ac.jp

[3]例えば [11] は簡潔に基本的なことが紹介されている。なお、この文献は連載記事の一つで、連載全体を通して渦運動全般の簡潔な入門書という構成になっている。その全てが、掲載誌のホームページから容易に入手できる。数学的な発展は、[24, 28, 30] などに詳しい。数学を専門とする研究者には、[13, Chapter15] も簡潔で分かりやすい。

おける、点渦系の連続的な分布関数である「平衡平均場」を考察している [4]。特に平衡平均場は、分布が時間に依存しない状態を表すものである。2次元 Gel'fand 問題は、この点渦系の平衡平均場が満たす非線形偏微分方程式の境界値問題を表す一般名称であるが、様々な由来を持つことが知られ、数学の中では古くから深く研究されてきた（例えば、[1, 35] などに詳しい)。その一つである爆発解析と呼ばれる分析から、ある種の状況では、その解の極大点が有限個であることが知られている。これを点渦系について述べれば、点渦が有限個の点の周りに凝集している状況が存在する可能性を示していることになる。さらに、系の逆温度が特定の値に近づくと、凝集が更に進んで最終的には有限個の点に集中し、更に、その有限個の点が、改めて点渦系を構成しているかのように、点渦系の停留点に近づくことが知られている。点渦系の停留点は点渦系の Hamiltonian の臨界点だった。本稿で紹介するのは、このような点渦が凝集した平衡状態での Gel'fand 問題の線形化作用素の固有値の挙動である。これもまた、点渦系の Hamiltonian に従うことを紹介したい。

以下、2章では点渦系の復習、Euler 方程式との関連を簡単に確認し、第3章では点渦系の平衡平均場の導出の概要を述べる。ここまでが背景の説明である。以降が数学的な本題であるが、4章で Gel'fand 問題の爆発解析に関する既存の結果の概要を述べ、5章で我々の結果、6章でその証明の概略を紹介する。最後の第7章で今後の課題などを述べる。

2 点渦系と Euler 方程式

2次元の有界な領域 Ω における非圧縮性完全流体の運動は、Euler 方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = -\nabla p, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{v}\left(= \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right) = 0. \tag{1}$$

に従う速度場 $\boldsymbol{v} = (v_1(x,t), v_2(x,t))$ と圧力 $p = p(x,t)$ で記述される（流体の密度は1とした)。境界条件は、通常 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nu} = 0$ が考えられている。ただし、$\boldsymbol{\nu}$ は Ω の境界 $\partial\Omega$ における単位外法線ベクトル場とする。詳しくは成書 [5] に譲るが、簡単のため Ω が単連結 [6] とすると、$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0$（非圧縮性）と境界条件 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nu} = 0$ から、渦度場 $\omega = \operatorname{curl}\boldsymbol{v} := \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}$ について

$$-\Delta\psi = \omega \quad \text{in } \Omega, \qquad \psi = 0 \quad \text{on } \partial\Omega$$

を満たす ψ を用いて、$\boldsymbol{v} = \nabla^\perp\psi = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_2}, -\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)$ という関係がある。これを $-\Delta$ の Dirichlet 条件での Green 関数、すなわち、

$$-\Delta G(\cdot,y) = \delta_y \quad \text{in } \Omega, \qquad G(\cdot,y) = 0 \quad \text{on } \partial\Omega.$$

の解を用いて表せば、$\psi(x) = G\omega(x) := \int_\Omega G(x,y)\omega(y)dy$、$\boldsymbol{v}\left(= \nabla^\perp\psi\right) = \nabla^\perp G\omega$ と表すことができる [7]。このような ψ は速度場 $\boldsymbol{v}$ の流れ関数と呼ばれる。

(1) の第1式の両辺に curl を作用させることで、ω は

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\omega = 0 \tag{2}$$

[4] 近年の調査によると、Onsager 自身も平均場を考察していたとのことである。この事も含め、Onsager の考察に関する歴史や発展については [12] に詳しい。

[5] 例えば、数学の視点で書かれたものとしては、[8, 30] あるいは [24] などがある。

[6] 穴がないこと。

[7] 多重連結領域（何個かの穴が空いた領域）の場合には、この ψ に、保存量である境界を構成する各閉曲線に沿った循環に応じた調和関数が加えられる。

に従って時間発展することをが分かるが、$\boldsymbol{v} = \nabla^{\perp} G\omega$ ゆえ、(2) は ω について閉じた方程式といえる。方程式 (2) を渦度方程式と呼ぶ。

点渦系とは、単純に言えば、$\omega(x,t) = \sum_{j=1}^{N} \Gamma_j \delta_{x_j(t)}$ が渦度方程式 (2) の「解」となるような $\{(x_j(t), \Gamma_j)\}_{j=1,\cdots,N}$ のことである。但し、δ_p は点 $p\,(\in \Omega)$ を台とする Dirac 測度であり、Γ_j は位置 $x_j(t)$ にある点渦の強さ（循環）と呼ばれる量（実数）である。Kelvin の循環則から Γ_j は保存量と考えられている。その他物理的考察から、$\sum_{j=1}^{N} \Gamma_j \delta_{x_j(t)}$ という形も、時間発展しても維持されると考えられている。

なぜここで「解」と表現したかというと、現在においてもその妥当性は悩ましいと思われるからである。数学における偏微分方程式論において、「弱解」という通常の意味より弱い解の概念が導入されて久しいが、残念ながら点渦系は、一般的な意味では (2) の弱解とはみなせない。

まず弱解を説明するために、$\Omega \times (0,T)$ 上の各点で何回でも微分可能であるようななめらかな関数で、$\Omega \times (0,T)$ 内の有界領域を除いて関数の値が 0（特に、$\Omega \times (0,T)$ の境界では 0）であるようなもの全体を、$\mathscr{D}(\Omega \times (0,T))$ と表すことにしよう。$(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\,\omega = \mathrm{div}\,(\boldsymbol{v}\omega) = \mathrm{div}\,\left(\omega \nabla^{\perp} G\omega\right)$ という関係式から、$\phi \in \mathscr{D}(\Omega \times (0,T))$ であれれば、ガウスの発散公式により

$$\left(\int_0^T \int_\Omega (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\,\omega\phi dxdt =\right) \int_0^T \int_\Omega \mathrm{div}\,\left(\omega \nabla^{\perp} G\omega\right) \phi dxdt = -\int_0^T \int_\Omega \omega \nabla^{\perp} G\omega \cdot \nabla\phi dxdt$$

が従う。同様に、部分積分の公式から、

$$\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial \omega}{\partial t} \phi dxdt = -\int_0^T \int_\Omega \omega \frac{\partial \phi}{\partial t} dxdt$$

が得られる。これらを用いて、ω が (2) を満たす代わりに、ありとあらゆる $\phi \in \mathscr{D}(\Omega \times (0,T))$ に対し、

$$\int_0^T \int_\Omega \left[\omega \frac{\partial \phi}{\partial t} + \omega \nabla^{\perp} G\omega \cdot \nabla\phi\right] dxdt = 0 \tag{3}$$

を満たす ω を (2) の解と見なそうというわけである。(3) は渦度方程式 (2) の弱形式と呼ばれ、任意の $\phi \in \mathscr{D}(\Omega \times (0,T))$ に対し (3) を満たす ω を、渦度方程式の弱解と呼ぶ[8]。本来課せられる ω の微分可能性が、弱形式 (3) では一部必要なくなっていることに注意しよう。勿論渦度方程式 (2) の滑らかな解は弱解と見なすことができるので、弱解は、これまでの解の概念を拡張するものであるといえる。

ここでは詳細は割愛するが、数学的には、楕円型正則性定理、Sobolev 埋め込み定理[9]など、適切な偏微分方程式や関数空間の事実を用いても、(3) に渦度場 $\sum_{j=1}^{N} \Gamma_j \delta_{x_j(t)}$ を代入して解とみなすことはできない。残念ながら、特異性が強すぎるのである。少し工夫しながら、その事実を見てみよう。Green 関数の対称性 $G(x,y) = G(y,x)$ を用いると、

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \omega \nabla^{\perp} G\omega \cdot \nabla\phi dx &= \int_\Omega \int_\Omega \nabla_x^{\perp} G(x,y) \cdot \nabla\phi(x)\omega(x)\omega(y) dxdy, \\
&= \int_\Omega \int_\Omega \nabla_y^{\perp} G(x,y) \cdot \nabla\phi(y)\omega(y)\omega(x) dydx \\
&= \int_\Omega \int_\Omega \rho_\phi(x,y)\omega(x)\omega(y) dxdy,
\end{aligned}$$

[8] 通常これに加え、ω の適当な意味での可積分性を仮定する。また、ここでは簡単のため、初期条件がどのように満たされるべきかということは、考慮していない。

[9] 前者から、ω が空間的にどの程度積分可能なら $G\omega$ がどの程度滑らかになるのか、後者から、$G\omega$ の滑らかさから $G\omega$ がどの程度積分可能か分かる。これらの偏微分方程式、関数解析の知識は、[3] から全て得られる。

と表される。但し、

$$\rho_\phi(x,y) = \frac{1}{2}\left\{\nabla_x^\perp G(x,y)\cdot\nabla\phi(x) + \nabla_y^\perp G(x,y)\cdot\nabla\phi(y)\right\}$$

である。ここで Green 関数を

$$G(x,y) = \frac{1}{2\pi}\log|x-y|^{-1} + K(x,y)$$

と分解しよう。このとき、$K(x,y)$ は $\Omega\times\Omega$ で滑らかであり、y（あるいは x）を固定する毎に、関数 $K(\cdot,y)$（あるいは $K(x,\cdot)$）は調和関数になる。$K(x,y)$ は、Green 関数の正則部分と呼ばれる。これを用いて $\rho_\phi(x,y)$ を表すと（簡単のため $\phi\in\mathscr{D}(\Omega)$ とし、時間 t に関する依存性の記載を省略する)、

$$\begin{aligned}
\rho_\phi(x,y) &= \mathrm{I}+\mathrm{II}\\
\mathrm{I} &= -\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{(x-y)^\perp\cdot(\nabla\phi(x)-\nabla\phi(y))}{|x-y|^2}\\
\mathrm{II} &= \frac{1}{2}\left\{\nabla_x^\perp K(x,y)\cdot\nabla\phi(x) + \nabla_y^\perp K(x,y)\cdot\nabla\phi(y)\right\}
\end{aligned}$$

となる。II が滑らかな関数になることは明らかだが、I もよく見ると、$x=y$ では分母が定義されないにもかかわらず、そこを除けば微分の定義から有界関数であることも分かる（$\mathrm{I}\in L^\infty(\Omega\times\Omega)$)。

このような Green 関数の対称性に基づく考察は [36, 33] などにも見られるが、細胞性粘菌の凝集過程のモデルである走化性方程式でも活用されている ([34] など参)。

この ρ_ϕ の性質から、ω が、空間に関しては単に可積分（$\omega\in L^1(\Omega)$）というだけで、(3) が定義されることが分かる。しかし、$x=y$ での $\rho_\phi(x,y)$ の値を取り出すことになる渦度場 $\omega=\sum_{j=1}^N\Gamma_j\delta_{x_j(t)}$ は、この見方をしても、いわば「ぎりぎり」のところで解として見なすことができないのである。そもそも、点渦系が与える渦度場 $\sum_{j=1}^N\Gamma_j\delta_{x_j(t)}$ が定める速度場 $\boldsymbol{v}=\sum_{j=1}^N\Gamma_j\nabla^\perp G(x,x_j(t))$ は、運動エネルギー $\frac{1}{2}\int_\Omega|\boldsymbol{v}|^2dx$ が有限にはならず、物理学的にも解釈が難しいと思える。

しかし、点渦系の運動は 19 世紀から知られ、活用されている。

$$\Gamma_i\frac{dx_i}{dt} = \nabla_i^\perp H^{N,\boldsymbol{\Gamma}}(x_1,\cdots,x_N)\left(=\left(\frac{\partial H^{N,\boldsymbol{\Gamma}}}{\partial x_{i,2}}, -\frac{\partial H^{N,\boldsymbol{\Gamma}}}{\partial x_{i,1}}\right)\right) \tag{4}$$

ただし、

$$H^{N,\boldsymbol{\Gamma}}(x_1,\cdots,x_N) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^N\Gamma_j^2K(x_j,x_j) + \frac{1}{2}\sum_{1\le j,k\le N,\, j\ne k}\Gamma_j\Gamma_kG(x_j,x_k)$$

に従うというのである（但し、$x_i=(x_{i,1},x_{i,2})$ とする)。

(4) が Hamilton 系であることはよく知られている。例えば、$q_i=\sqrt{|\Gamma_i|}x_{i,1}$、$p_i=\operatorname{sign}\Gamma_i\sqrt{|\Gamma_i|}x_{i,2}$ とおくと、q_i、p_i を正準変数とする Hamilton 系と見なすことができる。この意味で、$H^{N,\boldsymbol{\Gamma}}$ は、点渦系の Hamiltonian と呼ばれる。なお、q_i、p_i が動く範囲（相空間）は、点渦が運動する領域 Ω（を適当に拡大したもの）に一致し、その面積は有限になる。

形式的には、点渦 x_i を動かす速度ベクトル

$$\frac{1}{\Gamma_i}\nabla_i^\perp H^{N,\boldsymbol{\Gamma}}(x_1,\cdots,x_N) = \nabla_x^\perp\left(\Gamma_iK(x,x_i) + \sum_{1\le j\le N,\, j\ne i}\Gamma_jG(x,x_j)\right)\Bigg|_{x=x_i}$$

は、渦度場 $\sum_{j=1}^{N}\Gamma_j\delta_{x_j}$ が与える速度ベクトル

$$\nabla_x^{\perp}\sum_{j=1}^{N}\Gamma_j G(x,x_j) \qquad (\text{注. } x=x_i \text{ で発散})$$

から、

$$\nabla_x^{\perp}\Gamma_i\left(\frac{1}{2\pi}\log|x-x_i|^{-1}\right) \quad (\text{注. } x=x_i \text{ で発散})$$

を引き抜いたものの、$x=x_i$ での値である。同様に、$H^{N,\Gamma}$ は、渦度場 $\sum_{j=1}^{N}\Gamma_j\delta_{x_j}$ の運動エネルギー

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_\Omega|\boldsymbol{v}|^2dx &= \frac{1}{2}\int_\Omega\int_\Omega G(x,y)\omega(x,t)\omega(y,t)dxdy\\ &= \frac{1}{2}\sum_{1\le j,k\le N}\Gamma_j\Gamma_k G(x_j,x_k) \qquad (\text{注. 無限大})\end{aligned}$$

から、

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\frac{\Gamma_j^2}{2\pi}\log|x_j-x_j|^{-1} \qquad (\text{注. 無限大})$$

を引き抜いて得られる。

このような形式的な計算の妥当性は、流体力学の文献では様々な説明がなされているが、基礎方程式である Euler 方程式の解であるのか、という意味では、明確ではないように思える。これについて、一般的な方法ではないと思うが、次のような考え方を紹介しておこう。

ξ を点 p の近傍以外では 0 になるような関数であり、$x=p$ を含む微小領域では $\xi\equiv 1$ であるとする。このとき、

$$p=\int_\Omega x\xi\delta_p dx$$

ゆえ、ξ_i を $p=x_i(t)$ とした上記関数、$\eta\in\mathscr{D}(0,T)$ について、$\phi=x\xi_i\eta$ を考えると、$(x_i(t),x_i(t))$ の近傍では、$\rho_\phi(x,\cdot)$ の特異性がある I と書いた部分が恒等的に 0 になるので、(定義されていない) $x=y=x_i(t)$ においても 0 と考えるのは妥当であろう。これより、$\omega(x,t)=\sum_{j=1}^{N}\Gamma_j\delta_{x_j(t)}$ を無理やり (3) に代入することで、

$$\int_\Omega\int_\Omega\rho_\phi(x,y,t)\omega(x,t)\omega(y,t)dxdy=\nabla_i^{\perp}H^N(x_1(t),\cdots,x_N(t))$$

が得られる。これが (4)（の弱形式）を導くことは容易に分かる（このような考察は、[36, 29] など参）。

以上のように、点渦系というものは有用であると思われるが、その基礎付けにはまだ考察の余地があるように思われる。

3 点渦系の平衡平均場

1992 年に公刊された論文 [4] は、その続編 ([5])、直後に出版された他の著者による同様の結果 ([21]) と共に、現在においても頻繁に引用される論文である。また、この論文により、多くの数学研究者、特に、非線形偏微分方程式研究者に、点渦系の「(平衡) 平均場 (mean field)」というも

のが意識されることになったと思われる。その後半は、「集中コンパクト性原理」に基づいて得られたEuler方程式の定常解に関連する結果であり、非線形偏微分方程式を研究する数学研究者には馴染み深い内容である。しかし、興味深いのはその前半で、タイトルも示唆しているが、「点渦系に平衡統計力学を適用して、(点渦系の平衡平均場という) Euler方程式の定常解を構成する」という内容であり、「平衡平均場」が表すEuler方程式の定常解を考察する妥当性に言及している。以下簡単に彼らの議論を紹介する。

全ての点渦の強度が一定値 $\Gamma = \Gamma(N)$ である点渦系を考える。このとき、$H^{N,\Gamma} = \Gamma^2 H^N$ だが、点渦系がHamilton系であることから、この系の正準Gibbs測度

$$\mu^N = \frac{e^{-\widetilde{\beta}\Gamma^2 H^N(x_1,\cdots,x_N)}}{\int_{\Omega^N} e^{-\widetilde{\beta}\Gamma^2 H^N(x_1,\cdots,x_N)} dx_1\cdots dx_N} dx_1\cdots dx_N$$

というものを考察することができる。ここで $\widetilde{\beta} = \widetilde{\beta}(N)$ は点渦系の「逆温度」と呼ばれる(温度[10]の逆数に比例する)定数である。統計力学によると、正準Gibbs測度は、適当な仮定を満たしながら温度が一定に保たれた系において、各状態(点渦でいえば N 点渦の配置)が起こり得る確率を表す。$\widetilde{\beta} > 0$ なら、エネルギー $\Gamma^2 H^N$ の値が大きいほどその配置は起こりにくいことになる。

正準Gibbs測度を用いると、この系の第1番目の点渦が Ω の各点で見出される確率は、

$$\rho^N(x_1) = \int_{\Omega^{N-1}} \mu^N dx_2\cdots dx_N$$

で与えられる。これは H^N の対称性からどの点渦に対しても同じものだが、$\Gamma = \frac{1}{N}$ (総循環 $N\Gamma = 1$)、$\widetilde{\beta} = \beta N$ のもと $N \longrightarrow \infty$ とした極限に、

$$\rho(x) = \frac{e^{-\beta G\rho(x)}}{\int_\Omega e^{-\beta G\rho(x)}dx} \tag{5}$$

を満たす ρ が現れることが示される([4, Thorem 2.1])。(5)の解が一意であれば ρ^N が ρ に、一意でない場合は(5)の解の「重ね合わせ」に(弱)収束する。

(5)の導出自体は物理学者によりなされてきたが([19, 20, 32]など。[12]も参)、そこでは極限に関するある仮定が課されていた。[4]は、それらを課すことなく「証明」したのである。議論自体は、$G(x,y)$ を有界関数に置き換えた場合のMesser-Sphon([26])によるもののようだが、[4]では $G(x,y)$ の特異性を詳細に評価することで、$\beta \in (-8\pi, \infty)$ の場合に結論を導いた。自己組織化には、高エネルギー状態ほど生じ易い $\beta < 0$ (負温度)という場合の可能性の有無(解の存在の有無)、解の形状(具体的な点渦の分布)が興味深いことになる。

(5)において、$-\beta G\rho = u$、$-\beta = \sigma$ とおくと、

$$\boxed{-\Delta u = \sigma\frac{e^u}{\int_\Omega e^u dx} \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \qquad (6)}$$

を得る。これ(及びその類似物)は、今日、非線形楕円型方程式の分野では「平均場方程式」と呼ばれている。

(2)から容易に分かることだが、滑らかな関数 $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ を用いて、渦度場 ω と流れ関数 $\psi = G\omega$ の間に $\omega = f(\psi)$ という関係があるとき、すなわち ψ が

$$-\Delta\psi = f(\psi) \quad \text{in } \Omega, \quad \psi = 0 \quad \text{on } \partial\Omega$$

[10]点渦系の場合、現実の流体の温度というわけではない。単に、理論的なパラメータであると思われる。

を満たすときはいつでも、$\omega = -\Delta\psi$ は (2) の定常解である。これより平均場方程式 (6) の解は渦度方程式 (2) の定常解を与える。非常に多くの定常解の可能性があるわけだが、平均場方程式の解は、特に意味があるものを与えていると感じる。

4　2次元ゲルファント問題の爆発解析

本稿の主な話題である2次元ゲルファント（Gel'fand）問題とは、次の境界値問題である：

$$-\Delta u = \lambda e^{u} \quad \text{in } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega. \tag{7}$$

ここで、Ω は境界が滑らかな $\mathbf{R}^2$ の有界領域、λ は正定数である。容易に分かるが、(7) は、$\frac{\sigma}{\int_\Omega e^u dx} = \lambda$ と置いて (6) を書き直したものに過ぎない。$\lambda > 0$ は $\sigma > 0$、すなわち、$\beta(= -\sigma) < 0$ を考察していることに注意しよう。

最初に述べたとおり、この方程式自体は古くから扱われている。例えば Liouville は局面論に関係してこの方程式を考察し、貢献も大きい ([23])。(7) の方程式は、Liouville 方程式とも呼ばれる。Gel'fand 自身は、化学反応の定常状態として、高次元の領域の場合も含めて上記境界値問題を考察した ([14])。特に、円盤上の解を高次元の場合も含めて詳細に解析している。その他、円環など、様々な領域での具体的な解の表示が知られるが、一般的な解の振る舞いに関する次の結果が興味深い：

定理 1 ([27]). $\lambda_n \downarrow 0$ を満たす列 $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ と、$\lambda = \lambda_n$ における (7) の解 u_n を一つ固定する。このとき、$\sigma_n = \lambda_n \int_\Omega e^{u_n} dx$ の部分列の極限としてありえるのは、

$$\text{(i) } 0, \qquad \text{(ii) } 8\pi m \ (m \in \mathbf{N}), \qquad \text{(iii) } +\infty$$

の何れかであり、各場合に応じて次のように振る舞う解の部分列が存在する：

(i) 0 に一様収束する。

(ii) m 点（内部）爆発する。すなわち、相異なる m 点からなる爆発集合 $\mathscr{S} = \{\kappa_1, \ldots, \kappa_m\} \subset \Omega$ が存在し、$\mathscr{S}$ では $\{u_n\}$ は無限大に発散し、$\overline{\Omega}\backslash\mathscr{S}$ では、局所一様に次のように収束する：

$$u_n \longrightarrow u_\infty(x) = 8\pi \sum_{j=1}^{m} G(x, \kappa_j). \tag{8}$$

(iii) 全点爆発する。すなわち、任意の $x \in \Omega$ において $u_n(x) \longrightarrow +\infty$。

更に、(ii) において爆発集合 $\mathscr{S} = \{\kappa_1, \ldots, \kappa_m\} \subset \Omega$ は次の関係式をみたす：

$$\nabla \left(K(x, \kappa_i) + \sum_{1\le j\le m,\, j\ne k} G(x, \kappa_j) \right) \Bigg|_{x=\kappa_i} = 0 \quad (1 \le i \le m), \tag{9}$$

(ii)、(iii) のように、関数の列に対し、各関数の最大値が発散するような挙動を「爆発」と呼ぶことが多い。爆発の可能性を分類することは、爆発解析と呼ばれる。なお、正の λ_n が 0 に近づかないような場合には、$\sigma_n = \lambda_n \int_\Omega e^{u_n} dx$ が有限に留まる限り爆発しないことも知られている。

$\sigma_n = \lambda_n \int_\Omega e^{u_n} dx$ は、(7) を (6) に戻した時の σ に対応し、$\sigma = -\beta$ のことだった。すなわち、逆温度が有限に留まれば、それが特別な値 $-8\pi m$ に収束する時しか爆発しないということである。

また、$\beta_n = -\sigma_n$、$-\beta_n G\rho_n = u_n$ とおくと、点渦系の平均場である ρ_n と u_n には

$$\rho_n = -\Delta G \rho_n = -\frac{1}{\sigma_n}\Delta u_n$$

という関係がある。(8) という挙動が意味することは（正確に示すには注意を要するが)、

$$\rho_n = -\frac{1}{\sigma_n}\Delta u_n \longrightarrow -\frac{1}{8\pi m}\Delta 8\pi \sum_{j=1}^{m} G(x,\kappa_j) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\delta_{\kappa_j}$$

である。すなわち、点渦系の分布を与える ρ_n は、系の逆温度 β_n が特別な値 $-8\pi m$ に収束する時のみ凝集し、その時点渦の分布は、m 個の点に均等に分配されることを示している。形が見えたといえないだろうか。

ここで、爆発集合の位置情報を与える (9) に注目しよう。Green 関数 $G(x,y)$ の対称性 $G(x,y) = G(y,x)$ から、その正則部分 $K(x,y)$ も対称性 $K(x,y) = K(y,x)$ をもつ。これより、

$$H^m(x_1,\ldots,x_m) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} K(x_j,x_j) + \frac{1}{2}\sum_{1\le j,k\le m,\, j\ne k} G(x_j,x_k),$$

という関数を導入して $\mathscr{S} \in \Omega^m$ と見なすことで、条件 (9) は $\mathscr{S}$ における H^m の全ての偏微分係数が 0、すなわち、「$\mathscr{S} \in \Omega^m$ は H^m の臨界点である」と一言で表現できる。この H^m は、点渦系の Hamiltonian である $H^{N,\mathbf{\Gamma}}$ の、$N = m$、$\mathbf{\Gamma} = (\Gamma_1,\cdots,\Gamma_m) = (\frac{1}{m},\cdots,\frac{1}{m})$ の場合に対して、$H^m = m^2 H^{N,\mathbf{\Gamma}}$ という関係にある。H^m の臨界点とは、この場合の点渦系の停留点である。すなわち (9) は、次のことを意味する：

> 2 次元 Gel'fand 問題の爆発集合 $\mathscr{S} \in \Omega^m$ は、点渦系 $\{(x_j(t), \frac{1}{m})\}_{j=1,\cdots,m}$ の停留点である。

定理 1 が発表された当時も、このことは知られていたようである。しかし、なぜそこに点渦系が現れるのか、ということがよく理解されていたとは考えにくい。点渦系は由来に議論の余地があったが、少なくとも定常解（停留点）については、平衡平均場の爆発極限として捕らえることができないだろうか。後で紹介する我々の最近の結果は、このような動機にも導かれている。

なお、定理 1 は解の存在については言及していないが、このように、爆発の可能性が絞り込まれたことは有益な情報であった。実際、これにより、H^m の臨界点が更に適当な条件（非退化性など）を満たす場合や領域が適当な性質を満たす場合に、定理 1 で可能性として示されていた爆発する解の列が実際に構成されている（[2, 9, 10] など)。また、爆発挙動を示す列ではないが、σ をパラメータとして解（すなわち、(6)）の解）を構成することや、それに関連する話題は、多数知られている（[7, 25]、及びその引用文献を参)。

5 ゲルファント問題の線形化固有値問題

Gel'fand 問題 (7) の解が、境界値が 0 であるような適切な関数の空間（関数解析の言葉では、Sobolev 空間 $H_0^1(\Omega)$）上の汎関数

$$F_\lambda(u)=\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2dx-\lambda\int_\Omega e^u dx$$

の臨界点として与えられることは容易に分かる。定理 1(ii) の結論は、

> 汎関数の列 $\{F_{\lambda_n}(u)\}$ に対応する臨界点の列 $\{u_n\}$ は、関数 H^m の臨界点でのみ爆発する。

と主張しているといえる。この対応をより深く見るために、Gel'fand 問題 (7) の解 u_n に関する線形化固有値問題

$$-\Delta v=\mu\lambda_n e^{u_n}v \quad \text{in } \Omega, \qquad v=0 \quad \text{on } \partial\Omega \tag{10}$$

を考察した。これは、汎関数 $F_{\lambda_n}(u)$ の、臨界点 u_n の周りのグラフの形状を調べていることに対応する。なお、固有関数の規格化条件として、

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)}=1$$

を課す。

この固有値 μ の挙動について、最近次のことを得た：

> **定理 2** ([17]). 定理 1(ii)(m 点爆発) を満たす解の列について、その線形化固有値問題 (10) の固有値を（重複固有値も重複度の数だけ異なるものと数えて）
>
> $$\mu_n^1\le\mu_n^2\le\mu_n^3\le\cdots$$
>
> とすると、次が成り立つ：
>
> $$\mu_n^k=-\frac{1}{2}\frac{1}{\log\lambda_n}+o\left(\frac{1}{\log\lambda_n}\right)(\longrightarrow 0),\quad 1\le k\le m \text{ のとき},$$
> $$\mu_n^k=1-48\pi\eta^{(2m+1-s)}\lambda_n+o(\lambda_n)(\longrightarrow 1),\quad m+1\le k\ (=: m+s)\le 3m \text{ のとき},$$
> $$\mu_n^k>1,\quad k\ge 3m+1 \text{ のとき}$$
>
> ここで、$\eta^{(l)}$ $(l=1,\cdots,2m)$ は、$(\kappa_1,\cdots,\kappa_m)$ における行列 $D(\mathrm{Hess}H^m)D$ の第 l 固有値である。但し、行列 $\mathrm{Hess}H^m$ は H^m の Hessian、すなわち、$2m$ 次正方行列
>
> $$\left(\frac{\partial^2 H^m}{\partial x_{i,\alpha}\partial x_{j,\beta}}\right)_{i,j=1,..,m,\ \alpha,\beta=1,2}$$
>
> のことであり、行列 D は対角行列 $\mathrm{diag}[d_1,d_1,d_2,d_2,\cdots,d_m,d_m]$ である。但し、d_j は次で与えられる
>
> $$d_j=\frac{1}{8}\exp\left\{4\pi R(\kappa_j)+4\pi\sum_{\substack{1\le i\le m\\ i\ne j}}G(\kappa_j,\kappa_i)\right\}(>0).$$

u_n の線形化作用素の固有値が負であることに相当するのが、$\mu_n<1$ である。このとき、μ_n を不安定な固有値と呼ぶことにしよう。定理 2 から、どのような場合でも、少なくとも爆発点の数 m だけは、不安定な固有値（$\mu_1^k,\cdots,\mu_m^k$）が存在することになる。$D(\mathrm{Hess}H^m)D$ と $\mathrm{Hess}H^m$ では、正、0、負の固有値の数がそれぞれ等しいことは線形代数の知識を用いれば容易に分かる。これ

より、爆発点の数に加えて HessH^m の正の固有値の数だけ、不安定な固有値があることになる。Hamiltonian の臨界点の影響がここに現れている。なお、HessH^m の 0 固有値に対応する μ_n^k は、これだけでは安定・不安定を判別できないことに注意して、以上のことを整理して述べよう。

数学では、(10) の 1 未満の固有値の数（不安定な固有値の数）、1 以下の固有値の数は、それぞれ u_n における Morse 指数、拡張 Morse 指数と呼ばれるが、ここでは $\mathrm{ind}_M(u_n)$、$\mathrm{ind}_M^*(u_n)$ と表そう。同様に、関数 $-H^m$（負号をつけたことに注意）の臨界点 $(\kappa_1, \cdots, \kappa_m)$ における Hess$(-H^m)$ の 0 未満の固有値の数、0 以下の固有値の数は、それぞれ $(\kappa_1, \cdots, \kappa_m)$ における $-H^m$ の Morse 指数、拡張 Morse 指数と呼ばれる。これを $\mathrm{ind}_M\{-H^m\}(\kappa_1, \cdots, \kappa_m)$、$\mathrm{ind}_M^*\{-H^m\}(\kappa_1, \cdots, \kappa_m)$ と表す。定理 2 は、次の評価を与えることになる：

定理 3 ([17]). 定理 1(ii)(m 点爆発) において、$n \gg 1$ で次の評価が成立する：

$$m + \mathrm{ind}_M\{-H^m\}(\kappa_1, \cdots, \kappa_m) \le \mathrm{ind}_M(u_n),$$
$$\mathrm{ind}_M^*(u_n) \le m + \mathrm{ind}_M^*\{-H^m\}(\kappa_1, \cdots, \kappa_m).$$

特に $(\kappa_1, \cdots, \kappa_m)$ が H^m の非退化臨界点のとき、すなわち、

$$\mathrm{ind}_M\{-H^m\}(\kappa_1, \cdots, \kappa_m) = \mathrm{ind}_M^*\{-H^m\}(\kappa_1, \cdots, \kappa_m)$$

が成立するとき、

$$\mathrm{ind}_M(u_n) = \mathrm{ind}_M^*(u_n) = m + \mathrm{ind}_M\{-H^m\}(\kappa_1, \cdots, \kappa_m). \tag{11}$$

(11) は、u_n における線形化作用素が 0 固有値を持たないことを意味する。このとき、u_n は非退化であると言うが、爆発点 $(\kappa_1, \cdots, \kappa_m)$ が H^m の非退化臨界点であることから従うことになる。この事実は、[18] で得られた $\{u_n\}$ の 漸近的非退化性に他ならない。定理 3 は [18] の拡張であり、証明も洗練された。

以上の通り、特に $(\kappa_1, \cdots, \kappa_m)$ を H^m の非退化臨界点であるような点渦系の定常解とすると、そこで爆発しつつある平衡平均場について、その点での F_λ のグラフの不安定な方向の数が、爆発点 $(\kappa_1, \cdots, \kappa_m)$ における $-H^m$ のグラフの不安定な方向の数（$+m$）により与えられることになる。平衡平均場が、点渦系の定常解の、その解の周辺の H^m のグラフの構造まで含めて忠実に再現していると考えられないだろうか。

6 定理 2 の証明の概要

定理 2 の $m = 1$ の場合は [15] で扱われている。基本的には [15] 同様、固有値が変分問題として、以下のように特徴付けられることを用いる。

$$\mu_n^1 = \inf_{\substack{v \in H_0^1(\Omega) \\ v \ne 0}} \frac{\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx}{\lambda_n \int_\Omega e^{u_n} v^2 \, dx}, \quad \mu_n^k = \inf_{\substack{v \in H_0^1(\Omega),\, v \ne 0 \\ v \perp \mathrm{span}\{v_n^1, \ldots, v_n^{k-1}\}}} \frac{\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx}{\lambda_n \int_\Omega e^{u_n} v^2 \, dx} \quad (k = 2, 3, \cdots) \tag{12}$$

但し、v_n^l は、第 l 固有値 μ_n^l に対する固有関数である。

適当な関数 v を選び、Rayleigh 商と呼ばれる $\frac{\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx}{\lambda_n \int_\Omega e^{u_n} v^2 \, dx}$ を計算して固有値を上から評価してゆくが、固有値の順位が上がるに従い [15] に現れない複雑な計算をする必要がある。

なお、Rayleigh 商の評価は、あくまで上からの固有値の評価であるので、挙動を確定するには下からも評価する必要がある。そのために、あらかじめ固有値、固有関数の挙動の可能性を調べておくことが有効になる。いわば、固有関数の爆発解析を最初に行う。

尺度変換　考え方の例として、定理 1 で考察された Gel'fand 問題の m 点爆発する解の列 $\{u_n\}$ の、爆発の詳細を見て行こう。

十分小さな $R>0$ を固定すると、$n \longrightarrow \infty$ において

$$x_{j,n} \longrightarrow \kappa_j, \quad u_n(x_{j,n}) = \max_{B_R(x_{j,n})} u_n(x) \longrightarrow \infty \tag{13}$$

を満たす列 $\{x_{j,n}\}$ を選ぶことができることが示せる。この点列を中心に解 u_n を次のように変換する：

$$\widetilde{u}_{j,n}(\widetilde{x}) = u_n(\delta_{j,n}\widetilde{x} + x_{j,n}) - u_n(x_{j,n}) \quad \text{in } B_{\frac{R}{\delta_{j,n}}}(0) \tag{14}$$

ここでパラメータ $\delta_{j,n}$ は、$\lambda_n e^{u_n(x_{j,n})}\delta_{j,n}^2 = 1$ を満たすように選ぶのだが、定理 2 で与えられる d_j に対し、

$$\delta_{j,n}/\lambda_n^{\frac{1}{2}} \longrightarrow d_j \tag{15}$$

を示すことができる。これより $\delta_{j,n} \longrightarrow 0$ ゆえ、$\widetilde{u}_{j,n}$ は u_n を $x_{j,n}$ を中心に拡大して見たものに相当する。

一般に、u_n を $\widetilde{u}_{j,n}$ のように変形することは尺度変換と呼ばれる。ここでの $\widetilde{u}_{j,n}$ は次の方程式を満たす：

$$-\Delta\widetilde{u}_{j,n} = e^{\widetilde{u}_{j,n}} \ \text{ in } B_{\frac{R}{\delta_{j,n}}}(0), \qquad \widetilde{u}_{j,n} \le \widetilde{u}_{j,n}(0) = 0 \ \text{ in } B_{\frac{R}{\delta_{j,n}}}(0) \tag{16}$$

$n \longrightarrow \infty$ において $\delta_{j,n} \longrightarrow 0$ ゆえ、$B_{\frac{R}{\delta_{j,n}}}(0)$ は $\mathbf{R}^2$ に拡がってゆく。すなわち $\widetilde{u}_{j,n}$ は方程式

$$-\Delta u = e^u \quad \text{in } \mathbf{R}^2 \tag{17}$$

の解に近づくことが分かる。また、定理 1 から $\int_{B_R(x_{j,n})} e^{u(x)}dx \longrightarrow 8\pi$ が分かり、$\widetilde{u}_{j,n}$ の極限に現れる (17) の解は、$\int_{\mathbf{R}^2} e^{u(x)}dx < +\infty$ を満たすことも分かる。特別な領域である $\mathbf{R}^2$ での (17) の解は完全に求められていて、

$$\phi_{\varepsilon,x_0}(x) = \log\frac{32\varepsilon^2}{(4+\varepsilon^2|x-x_0|^2)^2}.$$

という形で与えられるが ([6])、我々の $\widetilde{u}_{j,n}$ の極限に現れる関数は、(16) から原点で最大値 0 を取るので、

$$\boxed{U(\widetilde{x}) := \log\frac{1}{\left(1+\frac{1}{8}|\widetilde{x}|^2\right)^2}}$$

に限られることになる。すなわち u_n のグラフは、$n \gg 1$ のとき、どの爆発点の近くでも、拡大鏡 (14) により、U のように見えるというわけである。これらの議論の細部を埋めることは必ずしも容易ではないが、現代の偏微分方程式論では標準的な議論になりつつある。

同じ事を、線形化固有値問題 (10) の解について考えてみる。固有値 μ_n に対する固有関数 v_n の $x_{j,n}$ の周りでの尺度変換

$$\widetilde{v}_{j,n}(\widetilde{x}) = v_n(\delta_{j,n}\widetilde{x} + x_{j,n}) \quad (\widetilde{x} \in B_{\frac{R}{\delta_{j,n}}}(0)). \tag{18}$$

は、次の方程式を満たすことになる：

$$-\Delta\widetilde{v}_{j,n} = \mu_n e^{\widetilde{u}_{j,n}}\widetilde{v}_{j,n}, \qquad (\widetilde{x} \in B_{\frac{R}{\delta_{j,n}}}(0)), \qquad \|\widetilde{v}_{j,n}\|_{L^\infty\left(B_{\frac{R}{\delta_{j,n}}}(0)\right)} \le 1. \tag{19}$$

これより、もし $n \longrightarrow \infty$ で μ_n が有限の値 μ_∞ に収束したとしたら、$\widetilde{v}_{j,n}$ の極限 V_j は、

$$-\Delta V = \mu_\infty e^U V \quad , \quad \|V\|_{L^\infty(\mathbf{R}^2)} \le 1. \tag{20}$$

の解 V_j に近づくことを示すことができる。(20) は、$\mathbf{R}^2$ での Gel'fand 問題の、U における線形化固有値問題である。このままでは $V_j \equiv 0$ の可能性が残るが、v_n が (10) の固有関数であることから、ある $j \in \{1, \cdots m\}$ が存在し、$V_j \not\equiv 0$ が分かる。これにより、μ_∞ が線形化固有値問題 (20) の固有値となることが分かる。

(20) の固有値、固有関数も、次のように分かっている（[15]）：

> 固有値 μ_∞ は全て、$\frac{k(k+1)}{2}$ （$k = 0, 1, 2, \cdots$）という形で表され、多重度はそれぞれ $2k+1$ である。特に、$\mu_\infty = 0$ の場合は、固有空間は定数関数で張られ、$\mu_\infty = 1$ の場合は、$\frac{\partial}{\partial \widetilde{x}_1}U$、$\frac{\partial}{\partial \widetilde{x}_2}U$、$\overline{U} := \widetilde{x} \cdot \nabla U + 2$ で張られる。

すなわち、次を得る：

- *i)* $\mu_\infty = 0$ のとき：$\boldsymbol{c} = (c_1, \cdots, c_m) \in \mathbf{R}^m \backslash \{0\}$ が存在し、$V_j \equiv c_j$ （$j = 1, \cdots, m$）である。
- *ii)* $\mu_\infty = 1$ のとき：$\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m) \in \mathbf{R}^{2m}$、$\boldsymbol{b} = (b_1, \cdots, b_m) \in \mathbf{R}^m$、$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \neq \boldsymbol{0} \in \mathbf{R}^{3m}$ である $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ が存在し、$V_j = \boldsymbol{a}_j \cdot \nabla U + b_j \overline{U}$ である。

残る μ_∞ の可能性は全て、$\mu_\infty > 1$ となる。すなわち、Morse 指数に関わる μ_n は、どんなに多くても $4m$ 個と分かる。

固有関数の極限形　尺度変換により、爆発点近傍の固有関数の「拡大図」が分かったわけだが、これは元の関数にどれほどの影響を与えるのであろうか。これも、Gel'fand 問題の解 u_n の場合を例として、簡単のため技術的な細部を妥協して考え方を紹介しよう。

u_n を Green 関数を用いて表示することで、

$$\begin{aligned} u_n(x) &= \int_\Omega G(x,y)\lambda_n e^{u_n} dy \\ &= \sum_{j=1}^m \int_{B_R(x_{j,n})} G(x,y)\lambda_n e^{u_n} dy + \int_{\Omega \backslash \cup_{j=1}^m B_R(x_{j,n})} G(x,y)\lambda_n e^{u_n} dy \end{aligned}$$

を得るが、$\Omega \backslash \cup_{j=1}^m B_R(x_{j,n})$ で u_n は有界ゆえ、

$$\left| \int_{\Omega \backslash \cup_{j=1}^m B_R(x_{j,n})} G(x,y)\lambda_n e^{u_n} dy \right| = O(\lambda_n) = o\left(\lambda_n^{\frac{1}{2}}\right)$$

としてよい。

一方、x が $x_{j,n}$ から離れたところでは $G(x,x_{j,n})$ は滑らかなので、テイラーの定理から、

$$G(x,y)=G(x,x_{j,n})+(y-x_{j,n})\cdot\nabla_y G(x,x_{j,n})+s(x,\eta,y-x_{j,n}),$$
$$s(x,\eta,y-x_{j,n})=\frac{1}{2}\sum_{1\le\alpha,\beta\le 2}G_{y_\alpha y_\beta}(x,\eta)(y-x_{j,n})_\alpha(y-x_{j,n})_\beta,$$
$$\eta=\eta(j,n,y)\in B_R(x_{j,n}),$$

と表される。これより、

$$\begin{aligned}&\int_{B_R(x_{j,n})}G(x,y)\lambda_n e^{u_n}dy\\&=G(x,x_{j,n})\int_{B_R(x_{j,n})}\lambda_n e^{u_n}dy+\nabla_y G(x,x_{j,n})\cdot\int_{B_R(x_{j,n})}(y-x_{j,n})\lambda_n e^{u_n}dy\\&\quad+\frac{1}{2}\sum_{1\le\alpha,\beta\le 2}\int_{B_R(x_{j,n})}(y-x_{j,n})_\alpha(y-x_{j,n})_\beta G_{y_\alpha y_\beta}(x,\eta)\lambda_n e^{u_n}dy\\&=:\sigma^0_{j,n}G(x,x_{j,n})+\boldsymbol{\sigma}^1_{j,n}\cdot\nabla_y G(x,x_{j,n})+\sigma^2_{j,n}\end{aligned}$$

という表示が得られる。

数学的に最も困難なのが $\sigma^2_{j,n}$ の評価だが、$\widetilde{u}_{j,n}$ が U に近づく様子を精密に評価した Y. Y. Li の評価（[22]）により、

$$\sigma^2_{j,n}=o(\lambda_n^{\frac{1}{2}})$$

が得られる。一方、尺度変換から

$$\frac{\boldsymbol{\sigma}^1_{j,n}}{\delta_{j,n}}=\frac{1}{\delta_{j,n}}\int_{B_R(x_{j,n})}(y-x_{j,n})\lambda_n e^{u_n}=\int_{B_{\frac{R}{\delta_{j,n}}}(0)}\widetilde{y}e^{\widetilde{u}_{j,n}}\longrightarrow\int_{\mathbf{R}^2}\widetilde{y}e^U=\mathbf{0}$$

が得られる。すなわち (15) から、

$$\boldsymbol{\sigma}^1_{j,n}=o(\delta_{j,n})=o\left(\lambda_n^{\frac{1}{2}}\right)$$

を得る。

以上により、次が成立することになる：

$\overline{\Omega}\setminus\cup_{j=1}^m B_R(x_{j,n})$ 上で一様に

$$u_n(x)=\sum_{j=1}^m\sigma^0_{j,n}G(x,x_{j,n})+o\left(\lambda^{\frac{1}{2}}\right).$$

定理 1 から $\sigma^0_{j,n}\longrightarrow 8\pi$ が得られるので、定理 1 における u_n の挙動 (8) が、精密に得られたことになる。

特に各 $\partial B_R(x_{j,n})$ 上

$$\nabla u_n(x)=-\frac{\sigma^0_{j,n}}{2\pi}\cdot\frac{\nu}{R}+\nabla k_{j,n}(x)+o\left(\lambda_n^{\frac{1}{2}}\right)\tag{21}$$

を得る。ここで、ν は $\partial B_R(x_{j,n})$ の外法線ベクトルであり、

$$k_{j,n}(x)=\sigma_{j,n}^0 K(x,x_{j,n})+\sum_{1\le i\le m, i\ne j}\sigma_{i,n}^0 G(x,x_{i,n})$$

と置いた。$k_{j,n}(x)$ は $B_R(x_{j,n})$ 上の調和関数であり、

$$\nabla k_{j,n}(x_{j,n})\longrightarrow 8\pi\nabla_{x_j}H^m(\kappa_1,\cdots,\kappa_m) \tag{22}$$

である。ここに Hamiltonian が自然に現れることに注意しよう。

同様のことを線形化固有値問題の固有関数で考えてみる。Green 関数による表示

$$\frac{v_n(x)}{\mu_n}=\int_\Omega G(x,y)\lambda_n e^{u_n}v_n dy$$

を用いて、

$$\begin{aligned}
\gamma_{j,n}^0&=\int_{B_R(x_{j,n})}\lambda_n e^{u_n}v_n\,dx,\\
\boldsymbol{\gamma}_{j,n}^1&=(\gamma_{j,n}^{1,1},\gamma_{j,n}^{1,2}),\\
&\qquad\gamma_{j,n}^{1,\alpha}=\int_{B_R(x_{j,n})}(x-x_{j,n})_\alpha\lambda_n e^{u_n}v_n\,dx,\quad \alpha=1,2,
\end{aligned}$$

とおくと、

$$\frac{v_n(x)}{\mu_n}=\sum_{j=1}^m\left\{\gamma_{j,n}^0 G(x,x_{j,n})+\boldsymbol{\gamma}_{j,n}^1\cdot\nabla_y G(x,x_{j,n})\right\}+o\left(\lambda_n^{\frac12}\right). \tag{23}$$

を得る。これから、固有関数に対して次が成立することになる：

$\overline{\Omega}\setminus\cup_{j=1}^m B_R(x_{j,n})$ 上で一様に

i) $\mu_\infty=0$ のとき：

$$\frac{v_n}{\mu_n}\longrightarrow\sum 8\pi c_j G(x,x_{j,n})+o(1). \tag{24}$$

ii) $\mu_\infty=1$ のとき：

$$\frac{v_n(x)}{\mu_n}=\sum_{j=1}^m\left\{\gamma_{j,n}^0 G(x,x_{j,n})-8\pi d_j\boldsymbol{a}_j\cdot\nabla_y G(x,x_{j,n})\right\}+o\left(\lambda_n^{\frac12}\right). \tag{25}$$

計算を進めてゆく上では、$\mu_\infty=1$ での $\gamma_{j,n}^0$ での挙動を知ることが問題になる。どのような値に収束するのか、という点では、$\boldsymbol{\gamma}_{j,n}^1$ 同様に分かる。実際、

$$\gamma_{j,n}^0=\int_{B_R(x_{j,n})}\lambda_n e^{u_n}v_n=\int_{B_{\frac{R}{\delta_{j,n}}}(0)}e^{\widetilde{u}_{j,n}}\widetilde{v}_{j,n}\longrightarrow\int_{\mathbf{R}^2}e^U\left\{\boldsymbol{a}_j\cdot\nabla U+b_j\overline{U}\right\}=0$$

だが、これから結論できることは、$\gamma_{j,n}^0=o(1)$ というだけであり、これがどのような速さで 0 になるのか評価されないと、(25) の誤差項の挙動との比較ができない。ここでは残念ながら細部には立ち入れないが、結論として次を得た：

$$\gamma_{j,n}^{0}=\begin{cases} o\left(\lambda_n^{\frac{1}{2}}\right), & (\boldsymbol{a}_i\neq 0\,\text{となる}\,i\,\text{が存在するとき}),\\ \dfrac{8\pi b_j+o(1)}{\log\lambda_n}, & (\text{それ以外の時}). \end{cases}$$

Hamiltonian が現れるところ 固有関数の可能性の詳細を知ることで、対応する固有値の挙動も絞られてくる。それを見るのに、Gel'fand 問題の方程式を微分してみよう。

$$-\Delta u_{x_\alpha}=\lambda e^{u}u_{x_\alpha} \tag{26}$$

この式から、u_{x_α} が、必ずしも境界条件は満たさないが、(7) の線形化問題（$\mu=1$ である (10)）の解である事が分かる。これより、固有関数 v_n に対し、

$$\Delta(u_n)_{x_\alpha}v_n-(u_n)_{x_\alpha}\Delta v_n=(-1+\mu_n)\lambda_n e^{u_n}(u_n)_{x_\alpha}v_n$$

という恒等式を得る。ここで、$\mu_\infty=1$ であるような固有関数 v_n を考察しよう。

得られている漸近形から、$\boldsymbol{a}_i\neq 0$ を満たすような i が一つでもあれば、$\overline{\Omega}\setminus\cup_{j=1}^{m}B_R\left(x_{j,n}\right)$ 上、$v_n/\lambda_n^{\frac{1}{2}}$ が有限の値に収束することに注意しよう。これより、各 $i=1,\cdots,m$ に対し、上記恒等式と発散公式から得られる

$$\int_{\partial B_R(x_{i,n})}\left\{\frac{\partial}{\partial\nu}\left(u_n\right)_{x_\alpha}\cdot\frac{v_n}{\lambda_n^{\frac{1}{2}}}-\left(u_n\right)_{x_\alpha}\cdot\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{v_n}{\lambda_n^{\frac{1}{2}}}\right\}d\sigma_x=\frac{-1+\mu_n}{\lambda_n^{\frac{1}{2}}}\int_{B_R(x_{i,n})}e^{u_n}\left(u_n\right)_{x_\alpha}v_n\,dx \tag{27}$$

の極限を調べることができる。左辺の積分が $\partial B_R(x_{i,n})$ 上、すなわち、爆発点から離れたところだけで行っていることに注意しよう。この挙動は、固有関数の漸近形として調べていたものから計算できる。右辺は尺度変換により計算する。これらより、

$$8\pi\sum_{\substack{1\le l\le m\\ \beta=1,2}}H^m_{x_{i,\alpha}x_{l,\beta}}(\kappa_1,\cdots,\kappa_m)(-8\pi d_i a_{l,\beta})+o(1)=\frac{-1+\mu_n}{\lambda_n}\left\{\frac{4\pi}{3d_i}a_{i,\alpha}+o(1)\right\}$$

が導かれ、ここに Hamiltonian H^m が現れる。

これを全ての i に対して丁寧に見てゆくと、次が得られる：

$\mu_\infty=1$ のとき、$\boldsymbol{a}_i\neq 0$ をみたす $i\in\{1,\cdots,m\}$ が存在すれば、$(\kappa_1,\cdots,\kappa_m)$ における $D\{\mathrm{Hess}H^m\}D$ の固有値 η が存在し、

$$\mu_n=1-48\pi\eta\lambda_n+o(\lambda_n) \tag{28}$$

また、類似の計算により次が得られる：

$\mu_\infty=1$ のとき、$b_i\neq 0$ をみたす $i\in\{1,\cdots,m\}$ が存在すれば、

$$\mu_n=1-\frac{3}{2}\frac{1}{\log\lambda_n}+o\left(\frac{1}{\log\lambda_n}\right) \tag{29}$$

Rayleigh 商の評価について　以上のように固有関数、固有値の挙動を事前に調べておくことにより、Rayleigh 商を用いて固有値を上から評価するだけで様々な結論が得られる。具体的には次のような手順で進む：

i) $k=1$ のとき。

$$\xi(r) := \begin{cases} 1, & 0 \le r \le 1 \text{ のとき}, \\ 0, & r \ge 2 \text{ のとき}, \end{cases} \qquad 0 \le \xi(r) \le 1,$$

を満たす滑らかな関数を選び、適当な $i \in \{1, \ldots, m\}$ を選び

$$\xi_n(x) := \xi\left(\frac{|x - x_{i,n}|}{R}\right) \tag{30}$$

と置く。$v = \xi_n u_n$ という形の関数を (12)$(k=1)$ の右辺に代入することで、

$$\boxed{0 \le \mu_n^1 \le -\frac{1}{2\log\lambda_n} + o\left(\frac{1}{\log\lambda_n}\right) \longrightarrow 0}$$

が得られる。すなわち、$\mu_n^1 \longrightarrow 0$ であり、事前に調べておいた様々なことも従う。
以下帰納的に評価してゆく。

ii) $k \ge 2$ では、

$$v := \xi_n u_n - s_n^1 v_n^1 - \cdots - s_n^{k-1} v_n^{k-1}$$

という形の関数で Rayleigh 商を評価する。ただし s_n^l は、$v_n \perp \operatorname{span}\{v_n^1, \ldots, v_n^{k-1}\}$ を満たすように次の式で与える。

$$s_n^l := \frac{\int_\Omega \nabla(\xi_n u_n) \cdot \nabla v_n^l \, dx}{\int_\Omega |\nabla v_n^l|^2 \, dx}. \tag{31}$$

具体的な評価は、

$$\boxed{0 \le \mu_n^k \le \frac{-16\pi\left\{1 - \sum_{l=1}^{k-1} \frac{(c_i^l)^2}{\|\mathbf{c}^l\|_{\mathbf{R}^m}^2}\right\}\log\lambda_n + o(\log\lambda_n)}{32\pi\left\{1 - \sum_{l=1}^{k-1} \frac{(c_i^l)^2}{\|\mathbf{c}^l\|_{\mathbf{R}^m}^2}\right\}(\log\lambda_n)^2 + o\left((\log\lambda_n)^2\right)}}$$

となるが、$1 - \sum_{l=1}^{k-1} \frac{(c_i^l)^2}{\|\mathbf{c}^l\|_{\mathbf{R}^m}^2} \ne 0$ となるように ξ_n を作るときの i を注意深く選べば、$\mu_n^k \longrightarrow 0$ を得る。この i を注意深く選ぶことが、$k = m$ まで可能であることが分かる。

iii) $\mu_\infty = 0$ の場合の固有関数の挙動は、尺度変換して現れるベクトル $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^m \backslash \{\mathbf{0}\}$ で特徴付けられるので、$k = m$ までで $\mu_\infty = 0$ となる可能性は全て尽くされたことになる。$k = m+1$ 以降は、v の選び方に別の考え方が要求され、ここでは、

$$v := \xi_n \frac{\partial u_n}{\partial x_\alpha} - s_n^1 v_n^1 - \cdots - s_n^m v_n^m,$$

$$s_n^l := \frac{\int_\Omega \nabla\left(\xi_n \frac{\partial u_n}{\partial x_\alpha}\right) \cdot \nabla v_n^l \, dx}{\int_\Omega |\nabla v_n^l|^2 \, dx}, \quad l = 1, \cdots, m,$$

と選ぶことが有効である。これを (12) に代入することで、

$$0 \leq \mu_n^{m+1} \leq 1 + O(\lambda_n). \tag{32}$$

と評価される。これより μ_n^{m+1} の $n \longrightarrow \infty$ での収束極限 μ_∞ の可能性は、$\mu_\infty = 0$ または $\mu_\infty = 1$ だが、既に述べたように $\mu_\infty = 0$ はあり得ない。これより、Rayleigh 商による固有値の上からの評価だけで、$\mu_\infty = 1$ が得られることになる。$b_j \neq 0$ をみたす $j \in \{1, \cdots, m\}$ が存在すれば、(29) から (32) という挙動はあり得ないので、$\boldsymbol{a}_j \neq 0$ となる j が存在することになり、(28) が従う。

あとは、ii) 同様の議論を繰り返してゆく。

7　今後の課題など

$+m$ の意味は？　(11) から分かるが、H^m の構造と u_n の F_{λ_n} の臨界点としての構造には $+m$ のずれがある。これを点渦系と平衡平均場のずれとして考えることも出来るであろう。この $+m$ に関連して、定理 2 の一部を精密にする次の結果を得た：

定理 4 ([16]). 定理 1(ii) で定まる部分列、各 $k \in \{1, \ldots, m\}$ に対し、次が成立する：$n \to +\infty$ において

$$\mu_n^k = -\frac{1}{2}\frac{1}{\log \lambda_n} + \left(2\pi\Lambda^k - \frac{3\log 2 - 1}{2}\right)\frac{1}{(\log \lambda_n)^2} + o\left(\frac{1}{(\log \lambda_n)^2}\right)$$

ここで Λ^k は、成分が次で与えられる $m \times m$ 行列 (h_{ij}) の第 k 固有値である：

$$h_{ij} = \begin{cases} R(\kappa_i) + 2\sum_{\substack{1 \leq h \leq m \\ h \neq i}} G(\kappa_h, \kappa_i), & i = j \text{ のとき}, \\ -G(\kappa_i, \kappa_j), & i \neq j \text{ のとき}, \end{cases}$$

行列 (h_{ij}) も定理 2 の D 同様、1 点爆発を扱う [15] では顕在化しないものであり、多点爆発特有のものである。H^m との関わりは、残念ながら現時点では理解が進んでいない。

Gel'fand 問題で良いのか？　我々は平均場方程式 (6) から、$\frac{\sigma}{\int_\Omega e^u dx} = \lambda$ とおいて Gel'fand 問題 (7) を導いた。しかしこれは、線形化問題を考えるときには安易といえるかもしれない。実際、(6) に対して u_n における線形化固有値問題を考えると、以下の通り (10) とは著しく異なる：

$$-\Delta v = \mu\lambda_n \frac{e^{u_n}}{\int_\Omega e^{u_n}}\left(v - \int_\Omega \frac{e^{u_n}}{\int_\Omega e^{u_n}} v\right) \quad \text{in } \Omega, \quad v = 0 \quad \text{on } \partial\Omega.$$

これは、Euler-Lagrange 方程式として方程式を導く汎関数の違いと言い換えられるが、Gel'fand 問題を与える汎関数 F_λ は物理的な意味を考えにくいようである。一方 (6) は、

$$f_\sigma(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \sigma \log \int_\Omega e^u dx$$

で与えられる。この f_σ は、見かけは複雑だが点渦系の自由エネルギーとの関係が知られている ([4, 21] など)。本稿の結果を、f_σ に関する線形化固有値問題で確認することは（$+m$ の意味を考察する上でも）興味深いと思われる。

そもそも平均場方程式は正しいのか？ 最後に、[4, 21] では、$\beta \in (-8\pi, \infty)$ の場合でのみ、平衡平均場が満たす式 (5) の導出の「証明」が与えられているに過ぎないことを思いだそう。与えられた証明も、$-\beta \leqq -8\pi$ では考えにくいように思える。残されている課題の一つであろう。

参考文献

[1] Bandle, C.: "Isoperimetric Inequalities and Applications", Pitman Publishing, London, (1980)

[2] Baraket, S., Pacard, F.: Construction of singular limits of a semilinear elliptic equation in dimension 2. Calc. Var. PDE **6**, 1–38 (1998).

[3] Brezis, H.: "Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations", Springer, New York, (2011)：フランス語版からの日本語訳（「関数解析—その理論と応用に向けて」，藤田 宏（監訳），小西 芳雄（訳），産業図書 (1988)）もあるが、英語版が最新で拡充されている。

[4] Caglioti, E., Lions, P.L., Marchioro, C., and Pulvirenti, M.: A special class of stationary flows for two-dimensional Euler equations: A statistical mechanics description Comm. Math. Phys. **143**, 501–525 (1992)

[5] Caglioti, E., Lions, P.L., Marchioro, C., and Pulvirenti, M.: A special class of stationary flows for two-dimensional Euler equations: A statistical mechanics description Part2 Comm. Math. Phys. **174**, 229–260 (1995)

[6] Chen, W. and Li, C.: Classification of solutions of some nonlinear elliptic equations, Duke Math. J. **63**, 615-622 (1991)

[7] Chen, C.C. and Lin, C.S.: Topological degree for a mean field equation on Riemann surfaces, Comm. Pure Appl. Math. **56**: 1667–1727 (2003)

[8] Chorin Alexandre J. and Marsden, Jerrold E.: "A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics ", Third Edition, Springer, New York, (1993)

[9] del Pino, M., Kowalczyk, M., Musso, M.: Singular limits in Liouville-type equations. Calc. Var. PDE **24**, 47–81 (2005).

[10] Esposito, P., Grossi, M., Pistoia A.: On the existence of blowing-up solutions for a mean field equation. Ann. Inst. H. Poincaré AN **22**, 227-257 (2005)

[11] Fukumoto, Y. (福本康秀):〔連載〕渦運動の基礎知識　2. 点渦系，ながれ **24**, 327–340 (2005), `http://www.nagare.or.jp/`

[12] Eyink, G. L. and Sreenivasan, K. R.: Onsager and the theory of hydrodynamic turbulence, Rev. Modern Phys. **78**, 87–135, (2006)

[13] Flucher, M.: " Variational Problems with Concentration", Birkhäuser, Basel, (1999)

[14] Gel'fand, I. M.: Some problems in the theory of quasilinear equations, Uspekhi Mat. Nauk, **14**:2(86), 87–158 (1959) ; Amer. Math. Soc. Transl. (2) **29**, 295–381 (1963)

[15] Gladiali, F., Grossi, M.: On the spectrum of a nonlinear planar problem, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **26**, 728–771 (2009)

[16] Gladiali, F., Grossi, M., Ohtsuka, H.: On the number of peaks of the eigenfunctions of the linearized Gel'fand problem, 投稿中, `arXiv:1308.3628`, 17pp (2013)

[17] Gladiali, F., Grossi, M., Ohtsuka, H., Suzuki, T.: Morse indices of multiple blow-up solutions to the Gel'fand problem, 投稿中, `arXiv:1210.1373`, 39pp (2012)

[18] Grossi, M., Ohtsuka, H., Suzuki, T.: Asymptotic non-degeneracy of the multiple blow-up solutions to the Gel'fand problem in two space dimensions. Adv. Differential Equations **16**, 145–164 (2011)

[19] Joyce, G. and Montgomery, D.: Negative temperature states for two-dimensional guiding-centre plasma, J. Plasma Phys. **10**, 107–121 (1973)

[20] Kida, S.: Statistics of the System of Line Vortices, Journal of the Physical Society of Japan **39**, 1395–1404, (1975)

[21] Kiessling, M.K.H.: Statistical mechanics of classical particles with logarithmic interactions, Comm. Pure Appl. Math. **46**, 27–56 (1993)

[22] Li, Y. Y.: Harnack type inequality: the method of moving planes, Comm. Math. Phys. **200**, 421–444 (1999)

[23] Liouville, J.: Sur l'equation aux différences partielles $\frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial u \partial v} \pm \frac{\lambda}{2a^2} = 0$, J. de Math. Pures et Appl. **18**, 71-72 (1853)

[24] Marchioro, C. and Pulvirenti, M.: " Mathematical Theory of Incompressible Nonviscous Fluids", Springer, New York, 1994.

[25] Malchiodi, A.: Morse theory and a scalar field equation on compact surfaces, *Adv. Differential Equations* **13**, 1109–1129 (2008)

[26] Messer, J. and Spohn, H.: Statistical mechanics of the isothermal Lane - Emden equation, J. Statist. Phys. **29** 561–578, (1982)

[27] Nagasaki, K., Suzuki, T.: Asymptotic analysis for two-dimensional elliptic eigenvalues problems with exponentially dominated nonlinearities. Asymptotic Analysis **3**, 173–188 (1990)

[28] Newton, Paul K.: "The N-Vortex Problem: Analytical Techniques ", Springer, New York, (2001)

[29] Ohtsuka, H.: An approach to regularize the vortex model, Proc. of the 5^{th} East Asia PDE Conference in GAKUTO Int. Ser. Math. Sci. Appl. **22**, 245–264, (2005)

[30] Okamoto, H.(岡本久): ナヴィエ - ストークス方程式の数理, 東京大学出版会, 東京, (2009)

[31] Onsager, L.: Statistical hydrodynamics, Nuovo Cimento Suppl. **6** (9) No.2, 279–287 (1949)

[32] Pointin, Y. B. and Lundgren, T. S.: Statistical mechanics of two-dimensional vortices in a bounded container, Phys. Fluids **19**, 1459–1470 (1976)

[33] Schochet, S., The weak vorticity formulation of the 2-D Euler equations and concentration-cancellation, Commun. Partial Differ. Equations **20**, 1077–1104 (1995)

[34] Senba, T. and Suzuki, T., Chemotactic collapse in a parabolic-elliptic system of mathematical biology, Adv. Differential Equations **6**, 21–50 (2001)

[35] Suzuki, T.: "Semilinear Elliptic Equations", Gakkōtosho, Tokyo, (1994)

[36] Turkington, B.: On the evolution of a concentrated vortex in an ideal fluid, Arch. Rational Mech. Anal. **97**, 75–87 (1987)